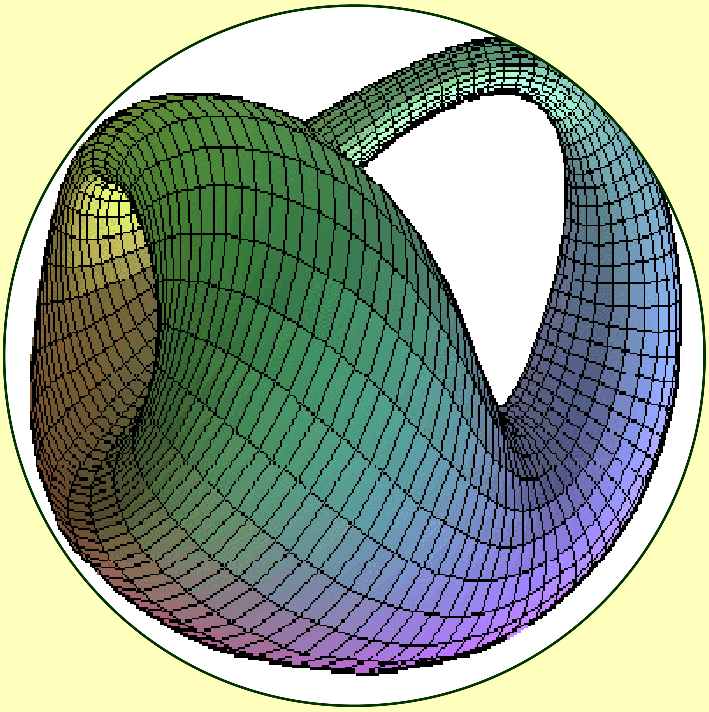
Manual Derive v.5



Camelia Soledad Flores Peña

CONTENIDO

OBJETIVO DEL CURSO

Usar y Aplicar de manera adecuada los recursos que el software ofrece para Resolver problemas geométricos y trigonométricos.

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN AL SOFTWARE MATEMÁTICO

1.1.1 ¿Qué es DERIVE?

DERIVE es un programa de computación matemática, el cual permite el procesamiento de variables algebraicas, expresiones, ecuaciones, funciones, vectores y matrices. DERIVE puede trabajar en forma numérica y en forma simbólica. Puede realizar factorizaciones, límites, derivadas, sumatorias, integrales, etc. DERIVE cuenta con la posibilidad de efectuar infinidad de gráficos en 2 y 3 dimensiones.

DERIVE es el software asistente de matemáticas en el cual se apoyan estudiantes, educadores, ingenieros y científicos alrededor del mundo. Los usuarios y evaluadores lo califican como el sistema simbólico de matemáticas más fácil de usar.

1.1.2 ¿Existen otros programas como DERIVE?

Sí, es muy común encontrar Software como DERIVE que realice funciones similares (y hasta más), algunos de estos son:
MATLAB, MATHEMATICA, MAPLE, SCILAB.

¿Por qué DERIVE en un curso de Matemáticas?
En problemas de Ingeniería, de Física, y en muchas otras ramas de la ciencia surgen gran cantidad de problemas matemáticos muy difíciles, prácticamente imposibles de realizar sino se cuenta con una herramienta computacional o tecnológica, como muchos suelen llamarla.

1.1.3 ¿Para qué un curso de Matemáticas si tenemos programas como DERIVE?

En el momento es prácticamente imposible hacer que un computador piense y razone como lo hace el ser humano, existen muchos errores que cometen los programas que a simple vista no es posible observar, errores que aparentemente no existen y que una persona con escaso conocimiento de las matemáticas no podría detectar. Son estos casos en los cuales debemos tener más cuidado y "Siempre desconfiar" de los resultados que arrojan programas como estos.

1.1.4 ¿Por qué DERIVE y no uno de los otros programas?

Primordialmente se ha elegido trabajar con DERIVE por la sencillez de este programa, pues aunque no es el más "Poderoso" de los programas para el trabajo con matemáticas, es uno de los más "amigables" para estudiantes de primeros niveles de universidad y para estudiantes de últimos niveles de bachillerato.

Por otro lado, el programa, como cualquier otra aplicación Windows, permite tener abiertas varias de estas ventanas, siendo “la ventana activa” aquella cuya barra de título esté “encendida”.

Otra de las ventajas de DERIVE es que permite crear nuevas utilidades a partir de las ya existentes, pudiéndose guardar en ficheros de extensión .MTH. Estos comandos tienen que ser cargados en la memoria del ordenador antes de ser utilizados por primera vez en un documento de trabajo.

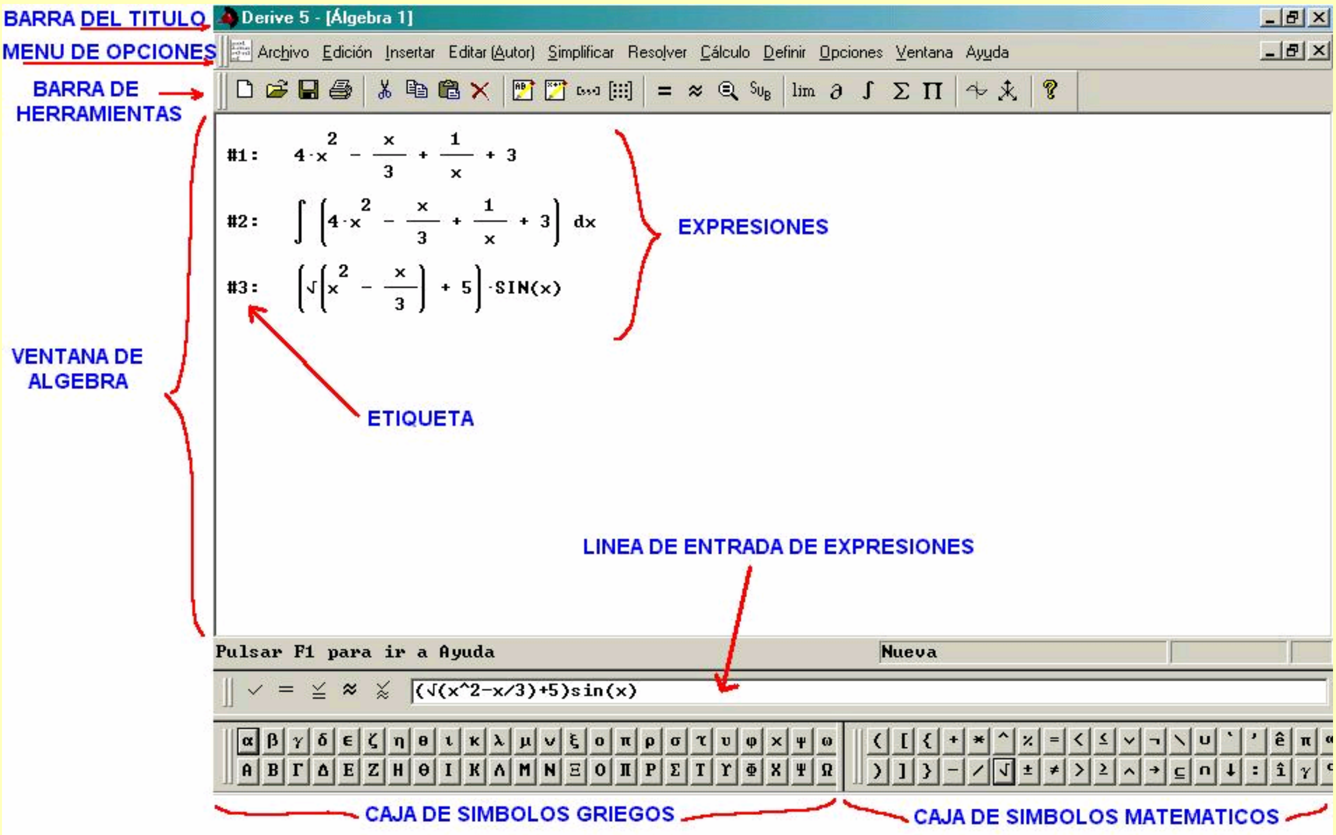
El programa DERIVE ofrece una ayuda tan completa como fácil de usar

CAPITULO 2: ENTORNO DE TRABAJO DE DERIVE

2.1 Pantalla de inicio.

DERIVE es un paquete de software con capacidad para desarrollar cálculo simbólico, análisis gráfico y manipulación numérica. Se trata de un programa que se ejecuta en el entorno Windows y que, por lo tanto, presenta las características habituales que tienen dichas aplicaciones.

Al ejecutar el programa aparece la siguiente ventana:



Cuando iniciamos Derive la primer ventana habilitada de las tres con las que cuenta es la venta de Algebra; ahí encontramos un Entorno en el cual se puede comenzar a trabajar con las expresiones algebraicas y después convertirlas en gráficos.

2.2 Barras

Para realizar las distintas operaciones con el programa DERIVE se puede hacer uso, bien de los botones de la barra de órdenes, o bien del menú principal que aparece en la parte superior de la pantalla (sólo se podrá trabajar con las opciones y botones que no estén “apagados”).

2.2.3 Barra de Titulo

Se muestra el nombre del Archivo abierto en ese momento que indica en que ventana se encuentra el usuario (de manera automática [Algebra1]), los botones de Minimizar, Maximizar y cerrar.

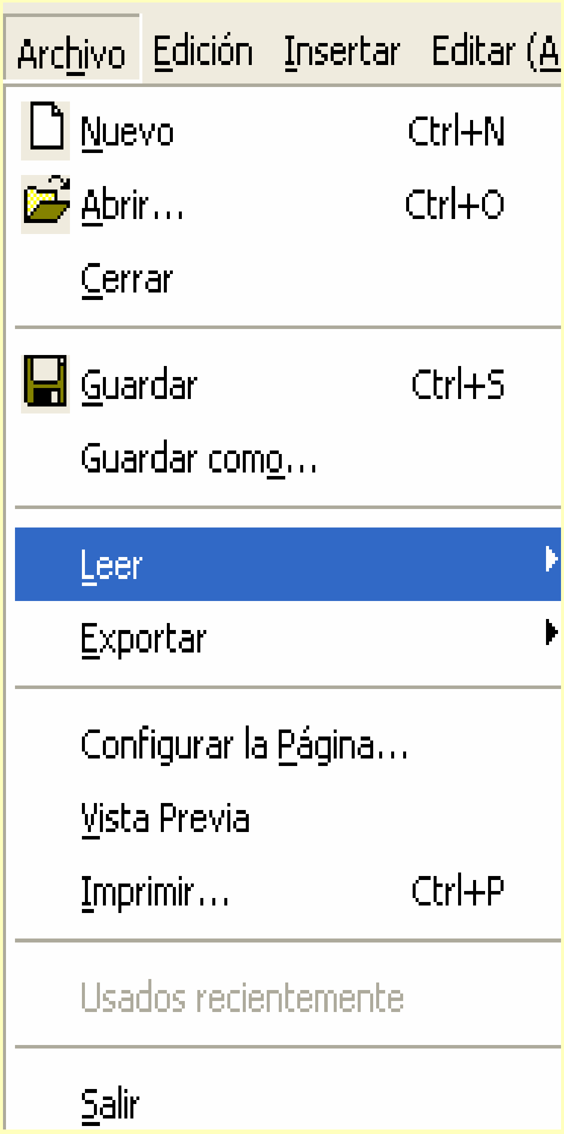
2.2.4 Barra de Menú.

Muestra los menús de opción de cada ventana. En la pantalla de inicio (Ventana de Algebra) tenemos los siguientes menús:

Las opciones del programa se distribuyen en forma de árbol, de modo que cuando se selecciona una de ellas se despliega un menú en el que aparecen nuevas opciones. La forma más sencilla de utilizar los menús es a través del ratón. No obstante, también se puede trabajar por medio del teclado (lo cual puede resultar más cómodo y rápido cuando se tiene suficiente soltura). Para desplegar un menú del menú principal, basta con presionar Alt + letra subrayada en opción. Una vez desplegado el menú se puede seleccionar una opción presionando la letra que aparece subrayada. Además, algunas opciones pueden ser directamente ejecutadas con la combinación de teclas que aparece a su derecha.

A continuación se presentan los menús y una descripción de cada opción:

***Archivo**



Crea una nueva hoja de trabajo.

Busca y Abre una nueva hoja de trabajo guardad anteriormente

Cierra la hoja de trabajo activa

Guarda la hoja de trabajo activa con su nombre actual

Guarda la hoja actual con un nombre diferente

Lee un archivo .mth, matrices numéricas de un fichero de datos, lee y ejecuta un archivo de demostración, un fichero de utilidades en la hoja activa.

Escribe archivos para Basic, C, Fortran, Pascal y .Rtf

Cambia los márgenes de la hoja de trabajo impresa.

Muestra las paginas como saldrán impresas.

Imprime la totalidad o parte del archivo.

Abre la hoja Usada Recientemente

Deja Derive Invitando a Guardar los Cambios Realizados.

*Edición

Edita el objeto Seleccionado

Edita la anotación de la expresión resaltada

Modifica los vínculos con OLE

Activa objetos vinculados o incrustados

Borra los objetos seleccionados

Recupera Los objetos borrados anteriormente.

Selecciona todos los objetos de la ventana activa

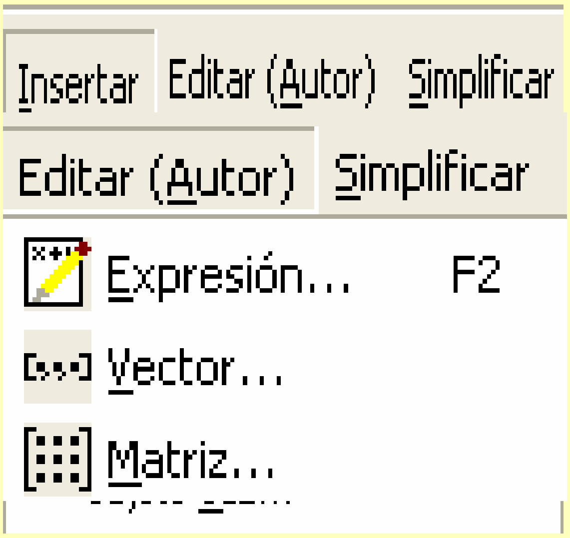
Mueve los objetos seleccionados al portapapeles.

Copia los objetos seleccionados al portapapeles.

Inserta los objetos del portapapeles delante del objeto seleccionado.

Marca una región de la ventana y la copia en el portapapeles.

*Insertar



*Editar (Autor)

Inserta una Grafica 2D en la hoja de trabajo Activa.

Inserta una Grafica 3D en la hoja de trabajo Activa.

Introduce una expresión en la hoja de trabajo activa.

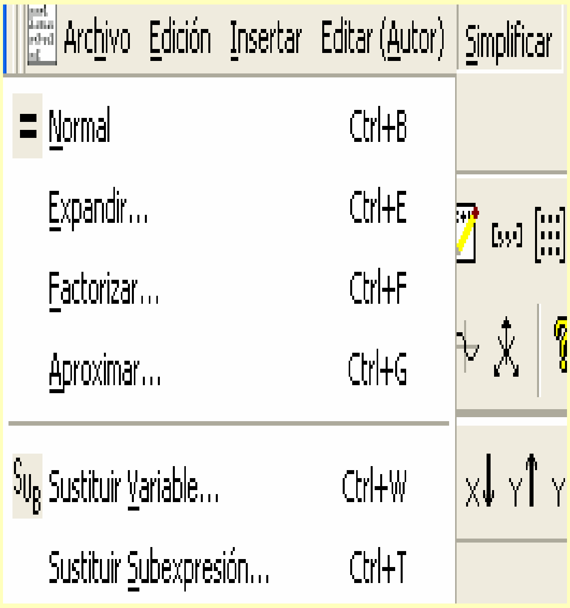
Inserta un objeto de texto en la hoja activa.

Introduce un vector en la hoja activa.

Inserta un nuevo objeto OLE en la hoja de trabajo activa.

Introduce una matriz en la hoja activa.

***Simplificar**



Simplifica la expresión resaltada.

Expande la expresión resaltada.

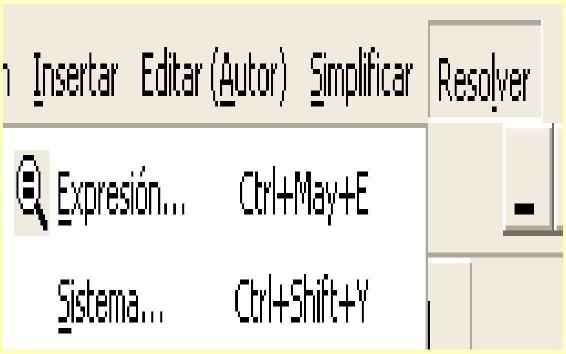
Factoriza la expresión resaltada.

Aproxima la expresión resaltada.

Sustituye las variables de la expresión resaltada.

Sustituye la subexpresión resaltada.

***Resolver**



Resuelve o despeja en la opción Resaltada.

Introduce y Resuelve un sistema.

*Cálculo

Cálculo Definir Opciones Ventana Ayuda

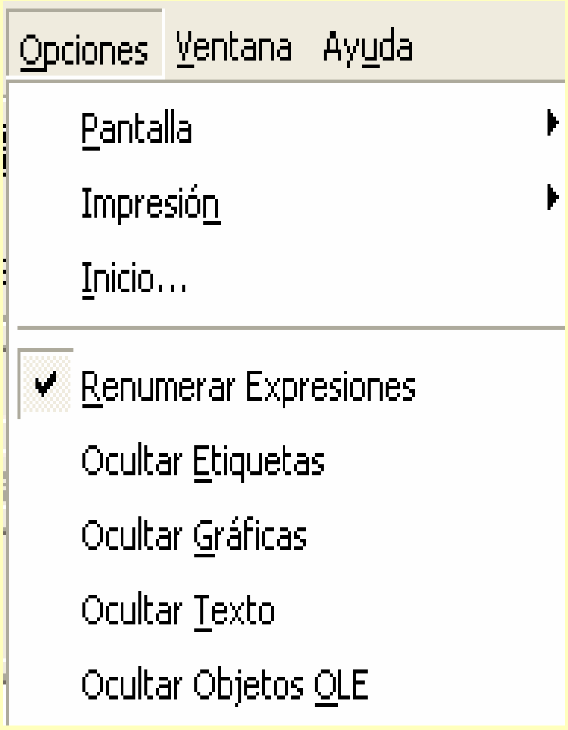
lim Límites...	Ctrl+May+L	Calcula el límite de la expresión resaltada.
∂ Derivadas...	Ctrl+May+D	Obtiene la derivada de la expresión resaltada.
Polinomios de Taylor...	Ctrl+May+T	Polinomio de Taylor para la expresión resaltada.
∫ Integrales...	Ctrl+May+I	Integral de la expresión resaltada.
∑ Sumas y Series...	Ctrl+May+S	Calcula sumas, series y antidiferencias.
∏ Productos...	Ctrl+May+P	Calcula productos o anticocientes.
Vector...	Ctrl+May+R	Calcula un vector dando valores a una expresión.
Tabla...	Ctrl+May+A	Genera una tabla dando valores a una expresión.

*Definir

Definir Opciones Ventana Ayuda

Valor para una Variable...	Ctrl+Alt+V	Asigna un valor particular a una variable.
Dominio de una Variable...	Ctrl+Alt+D	Establece el dominio de una variable.
Función...	Ctrl+Alt+F	Establece la definición de una nueva función.
Preferencias de Entrada...	Ctrl+Alt+I	Ajustes para asalta la entrada de expresiones.
Preferencias de Salida...	Ctrl+Alt+O	Ajustes en la salida o presentación de las expresiones.
Preferencias de Simplificación...	Ctrl+Alt+S	Preferencias en la forma de simplificar las expresiones.
Restablecer todas las Preferencias	Ctrl+Alt+R	Restablece todas las preferencias a sus ajustes originales.

***Opciones**



Da formato a la pantalla y a los objetos dentro.

Configura la página para su impresión.

Modifica las opciones de Inicio de Derive.

Renumera .automáticamente las expresiones cuando se reordenan.

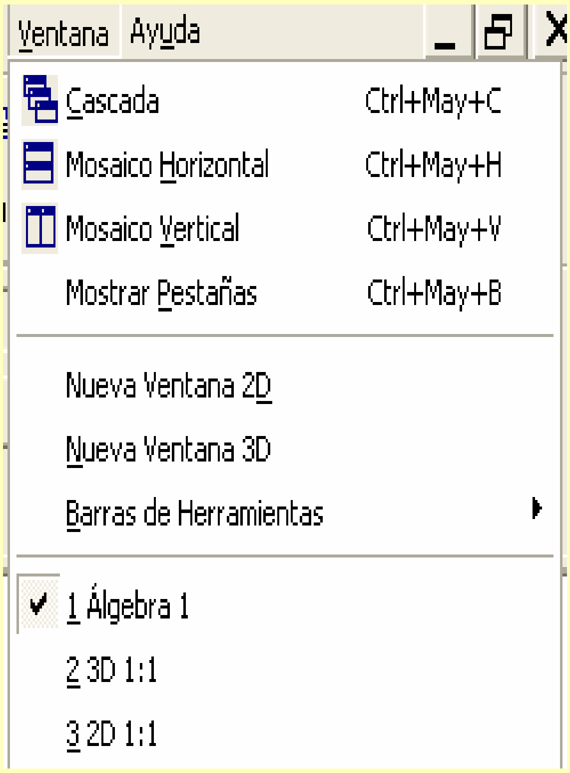
Oculta las etiquetas de las expresiones.

Oculta las Graficas incrustadas.

Oculta los objetos de texto seleccionados.

Oculta los objetos de texto seleccionados.

***Ventana**



Ordena las ventanas abiertas superponiéndolas.

Coloca las ventanas yuxtapuestas horizontalmente.

Coloca las ventanas yuxtapuestas verticalmente.

Muestra pestañas para seleccionar la ventana activa.

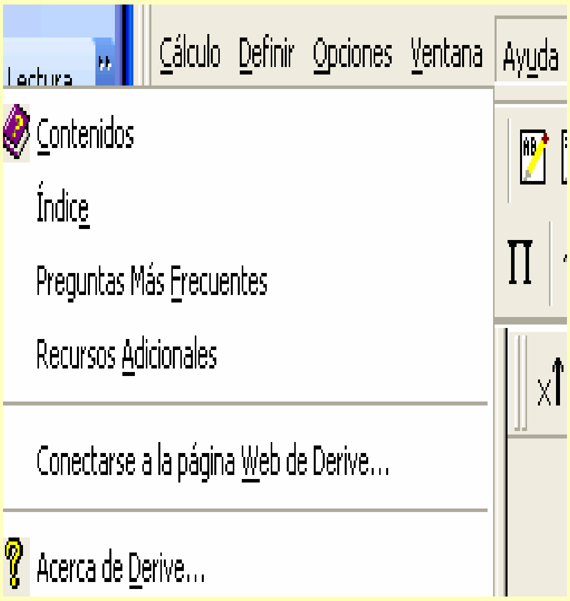
Nueva ventana activa 2D para la hoja de trabajo activa.

Nueva ventana activa 3D para la hoja de trabajo activa.

Muestra y/u oculta las barras de herramientas.

Activa cualquiera de las tres ventanas.

*Ayuda



Muestra la tabla de contenido del Menú Ayuda.

Lista de los Temas de Ayuda.

Da respuestas a las preguntas mas frecuentes.

Fuentes de Información Adicionales de Derive

Pagina Web de Derive.

Información acerca de la versión, copyright, memoria utilizada, etc.

2.2.5 Barra De Herramientas

Se encuentran los iconos que representan las herramientas mas utilizadas por los usuarios.

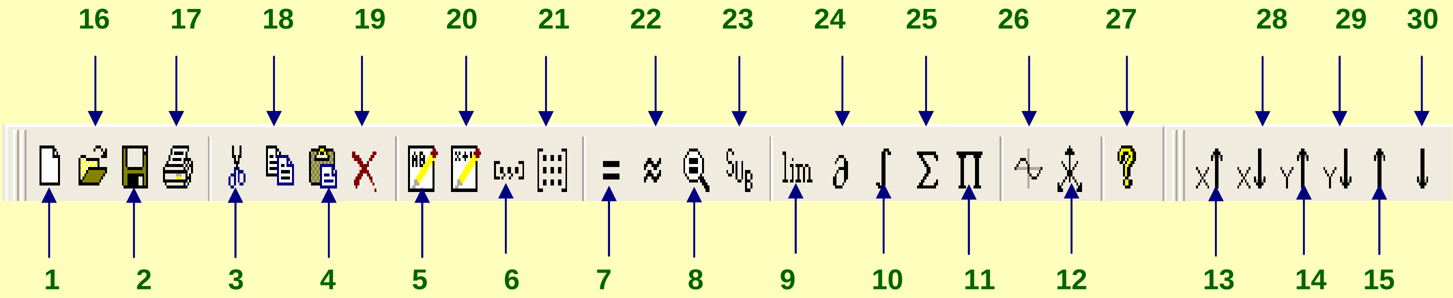
Trabajar con los botones es habitualmente más rápido, pero no contempla todas las posibilidades del programa.

Al situar el puntero del ratón sobre cualquier botón, aparece una pequeña ventana que muestra su función. Dicha función también se describe en la barra de estado.

Esta barra de Herramientas se divide en:

*Algebra

*Trazando Gráfica



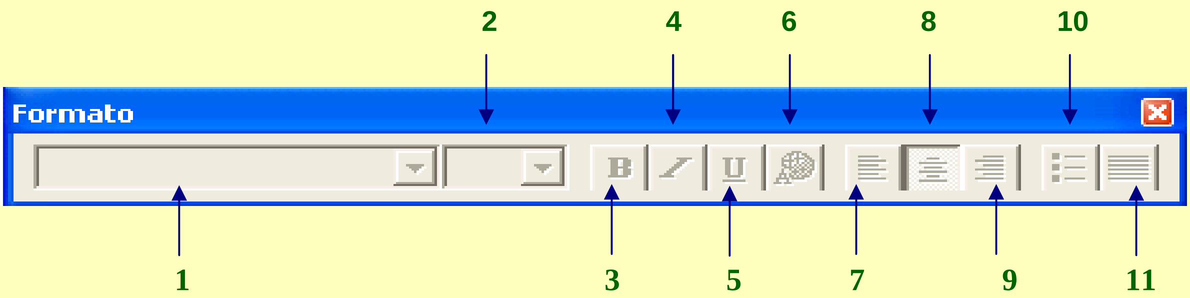
1.-Nueva Hoja
2.-Guardar
3.-Cortar
4.-Insertar
5.-Insertar Texto
6.-Introduce Vector
7.-Simplificar
8.-Resolver
9.-Calcular un Límite
10.-Integrales
11.-Calcular Productos

16.- Abrir
17.- Imprimir todo
18.- Copiar
19.-Eliminar
20.-Editar una expresión
21.-Introducir Matriz
22.-Aproximar
23.-Sustituir Variables
24.-Hallar una Derivada
25.-Calcular Sumatorias
26.-Ir a la ventan grafica 2D

12.-Ir a la ventana gráfica 3D
13.-Aumentar x (May→)
14.-Aumentar y (May ↑)
15.-Trazar la Grafica Siguiente
27.-Información sobre el programa
28.-Disminuir x (May←)
29.-Disminuir y (May ↓)
30.-Trazar la gráfica anterior

2.2.6 Barra de Formato

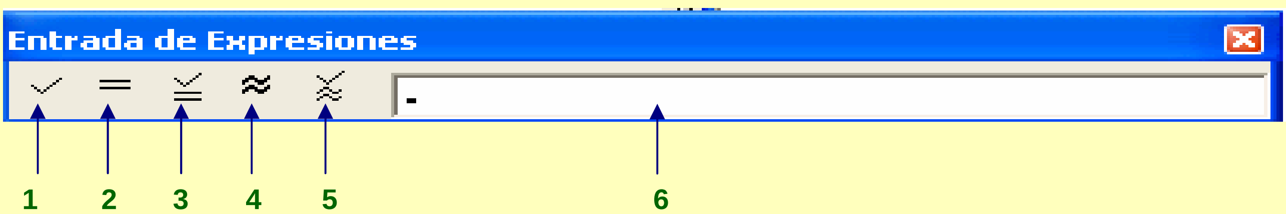
Esta barra se habilita cuando se inserta un objeto de Texto dentro de sus opciones están:



1.-Tamaño de la Fuente
2.-Escribir una expresión
3.-Negrita
4.-Cursiva
5.-Subrayado
6.-Color
7.-Justificar a la izquierda
8.-Centrar
9.-Justificar a la derecha
10.-Punto
11.-Texto de la ventana

2.3 Línea de Entrada de Expresiones

Aquí se inicia el trabajo en derive introduciendo la expresión a resolver en la ventana de algebra.



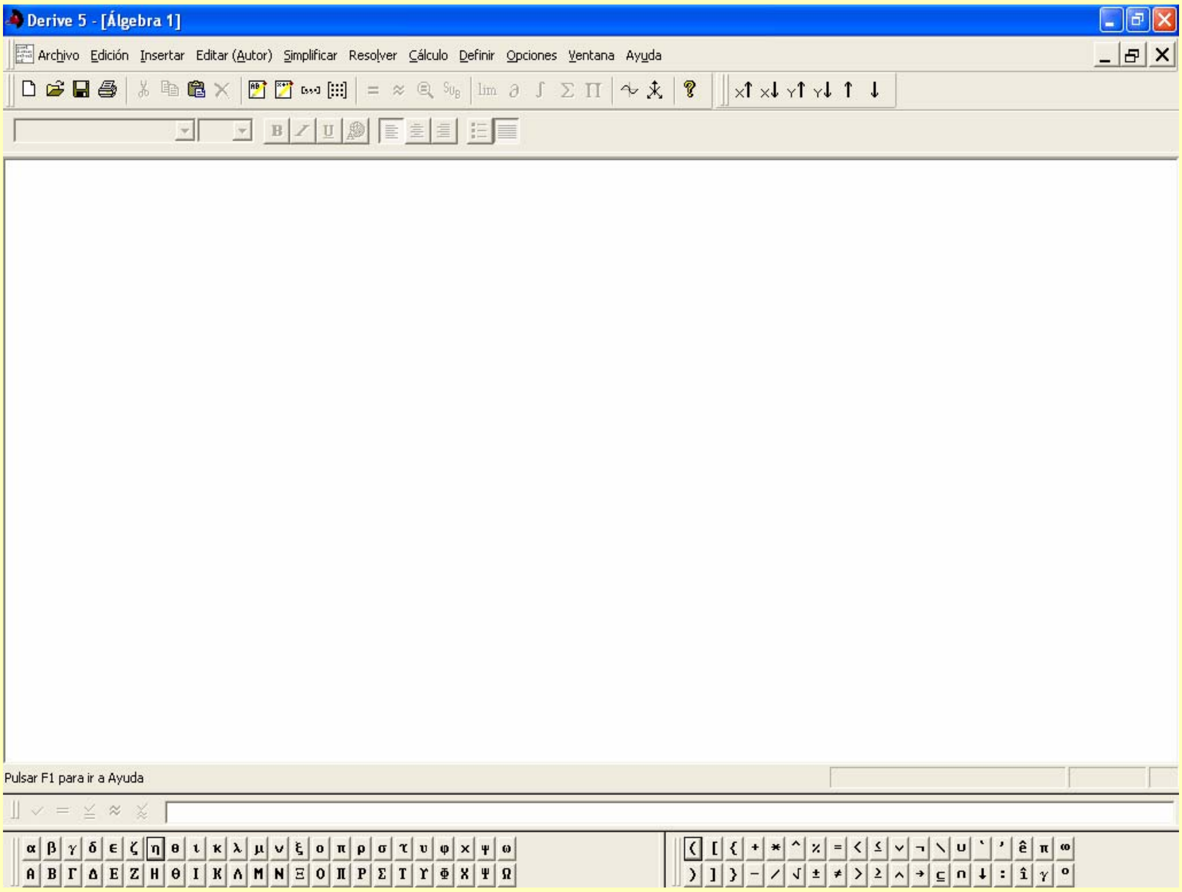
1.-Introducir Expresión
2.-Simplificar
3.-Introducir y Simplificar
4.-Aproximar
5.-Introducir y Aproximar
6.-Fuente

2.4 Ventanas

Para organizar el trabajo, Derive clasifica cada función específica en ventanas:

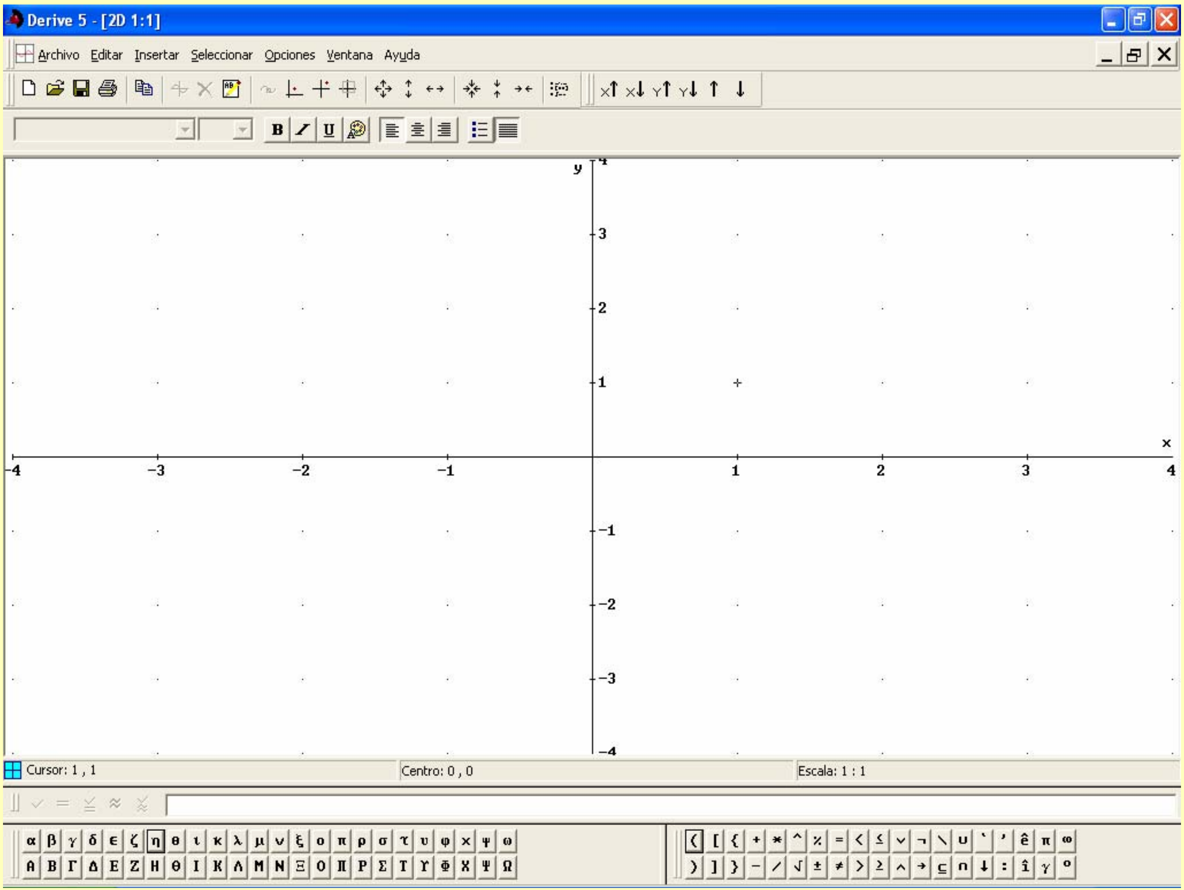
2.4.1 **Ventana de Algebra**

Es la que aparece al iniciar el programa y se utiliza para trabajar con expresiones simbólicas o numéricas. Y **R**esuelve las expresiones algebraicas.



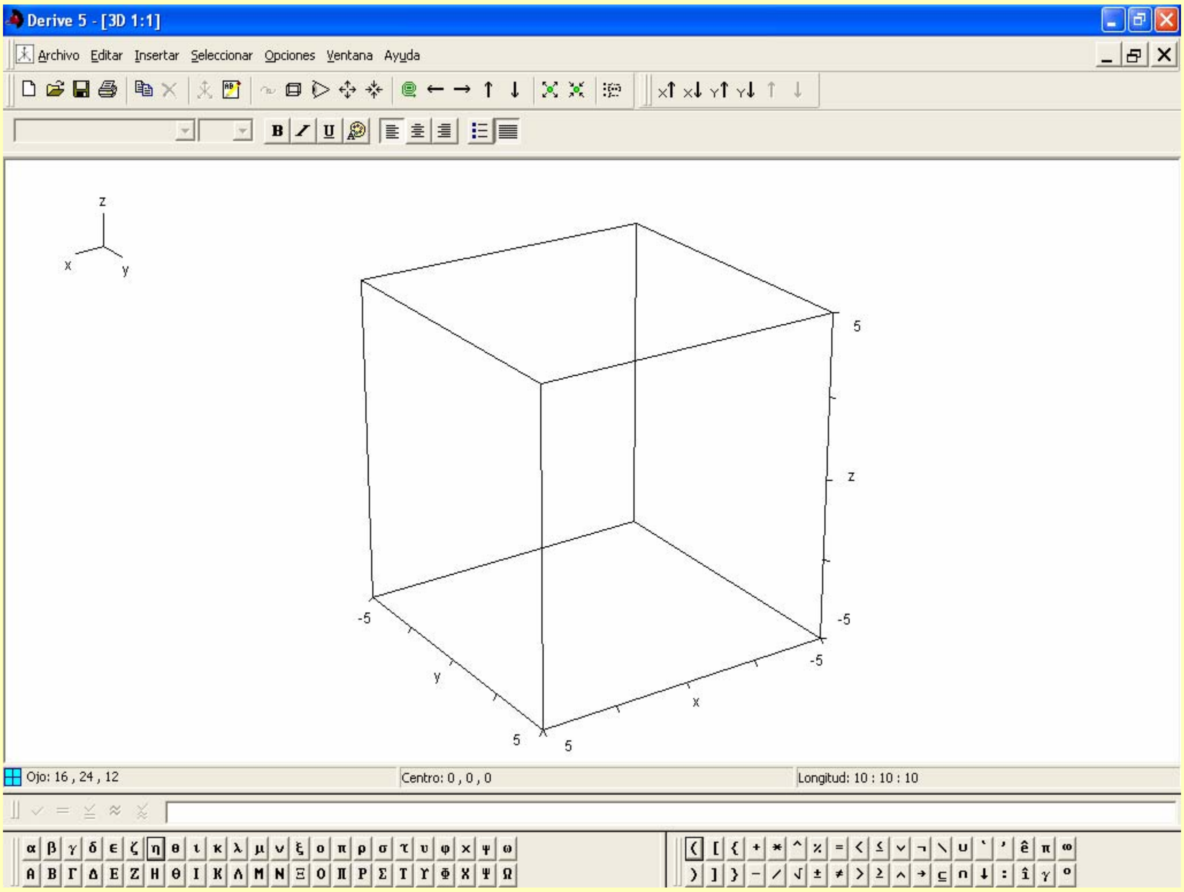
2.4.2Ventana 2D

Resuelve las expresiones y muestra el resultado de forma gráfica en dos dimensiones.



2.4.3 Ventana 3D

Resuelve la expresión matemática y arroja un resultado proyectado en una o varias gráficas de tres planos.



2.5 Caja de Símbolos

Para algunas expresiones matemáticas son necesarias, ya sea para nombrar variables o resolver operaciones especificas.

Griegos

Matemáticos.

CAPITULO 3 OPERACIONES BÁSICAS

3.1 Operadores Fundamentales

Teclado	Ratón	Definición
	±a	más y menos a.
a +b	a+b	a más b.
a −b	a−b	a menos b.
a ∗ b ↔ ab	a ∗b	a por b.
a/b	a/b	a partido por b.
aˆb	aˆb	a elevado b.
sqrt(a) ↔ Ctrl+q a	√‾	raíz cuadrada de a.
a!		factorial de a.
a/ =b		a es distinto de b.
a <=b	a≤ b	a es menor o igual que b.
a >=b	a≥ b	a es mayor o igual que b.
inf ∞ infinito.		
pi ↔ Ctrl+p	π = 3.1416	área del círculo de radio unidad.
#eˆa ↔ exp(a) ↔ Crtl+e ˆa		e elevado a a.
ln(a) ↔ log(a)		logaritmo neperiano de a.
s Ctrl+t	s`	complementario de s.
s Ctrl+ut	sU t	unión de s y t.
s Ctrl+nt	s∩ t	intersección de s y t.
s \ t		diferencia entre los conjuntos s y t.

3.2 Ingresar Expresiones

Las expresiones se ingresan, haciendo “clic” con el Mouse en la LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES y escribiendo allí la expresión deseada. Luego se puede hacer algunas de las combinaciones siguientes, según lo que desee:

1. * ó ENTER: Introduce la expresión escrita.

2. ó Ctrl + ENTER: Introduce y simplifica la expresión escrita.

3. ó Shift + ENTER: Introduce y aproxima la expresión escrita.

Ejercicios:

Introduzca 3/7 en la línea de entrada de expresiones, a continuación utilice las tres combinaciones. Observe la diferencia en los resultados.

Haga lo mismo con las expresiones:

a). Ln(2/3)

b). 2^3

c). sin (1.5)
d). x^2 - 9

Utilice la barra de expresiones para escribir la operación a realizar; Una vez escrita la expresión, es necesario pulsar la tecla Enter o hacer clic en el botón para que aparezca en la Ventana de Álgebra. El resto de los botones de la línea de edición permiten, obtener el resultado de la expresión, ya sea en forma algebraica ó numérica;

o bien mostrar tanto la expresión como el resultado de la misma, de nuevo en forma algebraica ó numérica.

Nótese que una vez introducida la expresión y/o su resultado en la Ventana de Álgebra, la expresión permanece seleccionada en la línea de edición. Como consecuencia, al introducir un nuevo carácter la expresión desaparece. Si el cursor no está en la línea de edición, para situarse en ella es necesario hacer clic con el ratón o pulsar la tecla F2. Si el texto de la línea de edición no aparece seleccionado, al escribir un nuevo carácter aparecerá en la posición del cursor sin borrar la expresión.

Una forma de seleccionar toda la expresión en la línea de edición es hacer doble clic sobre ella, mientras que es posible seleccionar una parte haciendo clic y arrastrando.
Las expresiones introducidas en la Ventana de Álgebra se van numerando consecutivamente. La que aparece seleccionada es la que denominaremos “expresión activa”. Al ejecutar una opción, ésta actuará sobre dicha expresión (por ejemplo, al ejecutar Plot se dibujará la gráfica de la expresión activa).

Para seleccionar una expresión distinta de la actual se puede utilizar el ratón o bien el teclado. Haciendo clic con el ratón se selecciona una expresión completa, y sucesivos clic permiten seleccionar sub-expresiones de ésta. Utilizando el teclado, las teclas ↓ y ↑ permiten seleccionar expresiones completas, mientras que ⇑ + ← , → , ↓ , ↑ permiten seleccionar sub-expresiones de la expresión activa. Para seleccionar varias expresiones consecutivas es necesario hacer clic a la derecha de la primera (resp. última) expresión y arrastrar el ratón hacia abajo (resp. hacia arriba).
Una expresión activa se puede recuperar en la línea de edición presionando F3 o F4 (este último introduce la expresión entre paréntesis). También se puede recuperar una expresión completa escribiendo # seguido del número que corresponde a su línea.

La forma más cómoda de mover una o varias expresiones seleccionadas consiste en hacer clic sobre ellas con el botón derecho del ratón, escoger la opción Cortar, hacer clic con el botón derecho del ratón sobre la expresión delante de la cual queremos colocar las expresiones y elegir la opción Pegar.

3.3 Expresiones adicionales

Cuando se trabaja con DERIVE, muchas veces es interesante introducir comentarios aclaratorios.

Esto se realiza mediante la opción Insertar → Objeto de texto.

En algunas ocasiones las operaciones de cálculo pueden requerir mucho tiempo o incluso no ser posibles. Este proceso se puede detener pulsando la tecla Esc.

La forma habitual de recuperar un fichero, guardado en una sesión de trabajo anterior en formato. DFW, es mediante la opción Archivo → Abrir o hacer doble clic sobre el nombre del archivo (en este último caso, no es necesario ejecutar previamente DERIVE).

CAPITULO 4: EXPRESIONES BÁSICAS (VENTANA ALGEBRA).

4.1 ¿Cómo seleccionar, editar, eliminar una expresión?

1. Usted puede seleccionar una expresión o parte de ésta haciendo "clic" sobre la expresión.

2. Para editar una expresión, seleccione la expresión a editar y haga "clic" derecho sobre la misma, luego elija la opción ***editar*** y cuando termine presione ENTER. Otra forma de entrar a editar la expresión es haciendo doble "clic" en frente de la expresión..

3. Para eliminar una expresión, selecciónela y luego presiones el botón de la barra de herramientas o la tecla Delete (o Suprimir) del teclado.

4. Si desea bajar una expresión de la ventana de Álgebra a la línea de entrada de expresiones, seleccione la expresión deseada y presione F3.

4.2 Ejemplos aplicados al programa de Matemáticas II

Ejemplos de cómo ingresar algunas expresiones en Derive:

Expresión a ingresar	**Forma de ingresarlo a Derive**
$\frac{x^2+3y}{5}$	(x^2+3*y)/5
$\frac{10x(x-1)^4}{(x-2)^{3x^2}(x+1)^2}$	(10*x*(x-1)^4)/((x-2)^(3*x^2)*(x+1)^2)
$\mathrm{sen}(x)+\cos(x)-\tan(x)+3$	sin(x)+cos(x)-tan(x)+3
$\mathrm{sen}(x)^{-1}$ ó $\mathrm{arcsen}(x)$	asin(x)

$\cos(x)^{-1}$ ó $\arccos(x)$	acos(x)
$\lvert x+1\rvert+\ln(x)+500$	abs(x+1)+ln(x)+500
$\dfrac{\sqrt{\frac{2}{5}x+3+e^{2x}}}{e^{-2a+b}}$	(√ (2/5*x+3)+exp(2*x))/(exp(-2*a+b))
$\log_2(x+1)+\sin(100\pi x)$	log(x+1,2)+sin(100*pi*x)
$\left(\sqrt[7]{1+x}\right)^{-\infty}$	((1+x)^(1/7))^(-inf)

4.3 Uso del Menú Help.

¿Qué hacer si se olvida cómo introducir alguna expresión?

En el menú de opciones aparece el botón “Ayuda” o “Help”. Con éste, en Contenido o en Índice es posible encontrar cómo se escribe la expresión olvidada. Allí también se encuentran respuestas a las preguntas más frecuentes.

4.4 Uso de Constantes.

¿Qué diferencia hay entre = y entre := ?

x = k significa : x es una constante de valor k.

Ejemplo:

#1: x = 36

#2: x+1

#3 x+1

x := k define x como una variable y le asigna el valor k, desde ese momento en adelante, el computador piensa que x es siempre k

Ejemplo:

#1: x := 36

#2: x+1

#3 37

F(x, y, ...) := u define a F como una función de x, y, ... como u(x, y, ...). Permite evaluar la función F para cualquier valor que se les a x, y, ...

Ejemplos:

#1: f(x):=2x+4

#2: f(1)

#3 6

#1: H(x,y):=3x+5y

#2: H(5,10)

#3: 65

Ejercicios: Evalúe:

f(-5)

f(2)+f(-3)

H(-100,2)

H(3,-3/8) – (H(5,10)+H(2,1))^(1/2)

Los estudiantes suelen dar doble “clic” sin darse cuenta, deshabilitando con esto los botones de la barra de tareas. Lo anterior se soluciona haciendo “clic” sobre la línea de entrada de expresiones y presionando la tecla Esc.

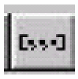
CAPITULO 5: VECTORES

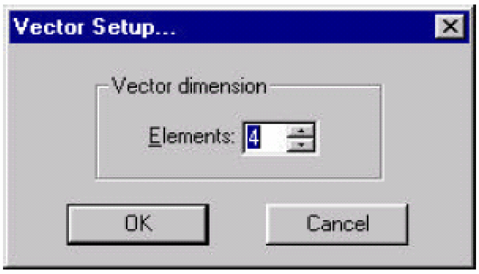
5.1 ¿Qué es un vector en Derive?

Un vector es un arreglo de la forma [a_1, a_2, a_3, ..., a_n].

5.2 ¿Cómo ingresar vectores en Derive?

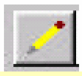
- **Vectores:** → Menú: **Author** – **Vector** o Botón:





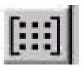
NOTA: Para derive un vector es una columna.

→ Menú: **Author** – **Expresion** o Botón:

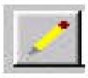


Sintaxis: ✓ v:=[v_1,v_2,v_3]
✓ v:=VECTOR(i^2, i,1,10) , donde i^2 significa i^2
✓ v:=VECTOR(PRIME(n), n, 1, 40)

- **Matrices:** → Menú: **Author** – **Matrix** o Botón:



→ Menú: **Author** – **Expresion** o Botón:



Sintaxis: ✓ A:=[[..,..,..],...,[..,..,..]]
✓ A:=VECTOR([..,..,..],...,[..,..,..])
✓ IDENTITY_MATRIX(n)

- **Cálculos con matrices:** → Suma A+B, producto A*B, inversa A^(-1)
→ Determinante: DET(A), DET(#n°)
→ Traspuesta: A`

Ejemplo 1: Ingresar en Derive el vector [1, 5, 25, 12]

Solución: ingresamos [1, 5, 25,12] y presionamos ENTER

Ejemplo 2: Construir la familia de curvas de la forma y = a*x^3+1, para los valores de a: -5, -4, -3,...,100.

Solución: Dada la magnitud del vector, sería demasiado largo emplear el método anterior para los diferentes valores de a. Para esto emplearemos el comando **vector**.

5.2.1 Comando VECTOR

Ingresamos en la línea de entrada de expresiones: **vector (y=a*x^3+1, a,-5, 100,1)**

Luego presionamos Ctrl + ENTER. Con lo cual resulta la familia, que estábamos buscando, en forma de vector así:

[y = -5*x^3+1,y = -4*x^3+1,y = -3*x^3+1, y=-2*x^3+1, y=-x^3+1, y=1, y=x^3+1, ..., y =100*x^3+1]

Hemos empleado el comando vector en la forma:

$$\mathbf{vector(f(variable),variable,valoINICIO,valorFIN,incremento)}$$

Ejemplo 3: Construya la familia de curvas de la forma y = a*x^3+1, para los valores de a: -10, -4, -3, 2, 7, 25,100.

Solución: Observamos que los números no siguen ninguna secuencia. Para resolver este ejercicio utilizamos una variación del comando **vector.**

Vector(y =a*x^3+1,a,[-10,-4,-3, 2, 7,25,100])

Tendremos entonces el resultado deseado presionando Ctrl + Enter.

Hemos utilizado la forma:

$$vector(f(variable), variable, [valor1, valor2, valor3, valor4, ..., valorn])$$

El comando **vector** que hemos empleado nos permite, también crear tablas:

Por ejemplo deseamos tener en una tabla dos columnas: una con los números 4, 6, 8,...,20 y una segunda columna que al frente de cada uno de los números anteriores se tenga su cuadrado.

En este caso utilizamos la siguiente forma:

$$vector([variable, f(variable)], variable, valorINICIO, valorFIN, incremento)$$

de la manera siguiente: **vector([n,n^2],n,4,20,2)**

Ejercicio: Haga una tabla con dos columnas: una con los números -10, -4, -3, 2, 7, 25, 100 y una segunda columna que al frente de cada uno de los números anteriores se tenga su cuadrado.

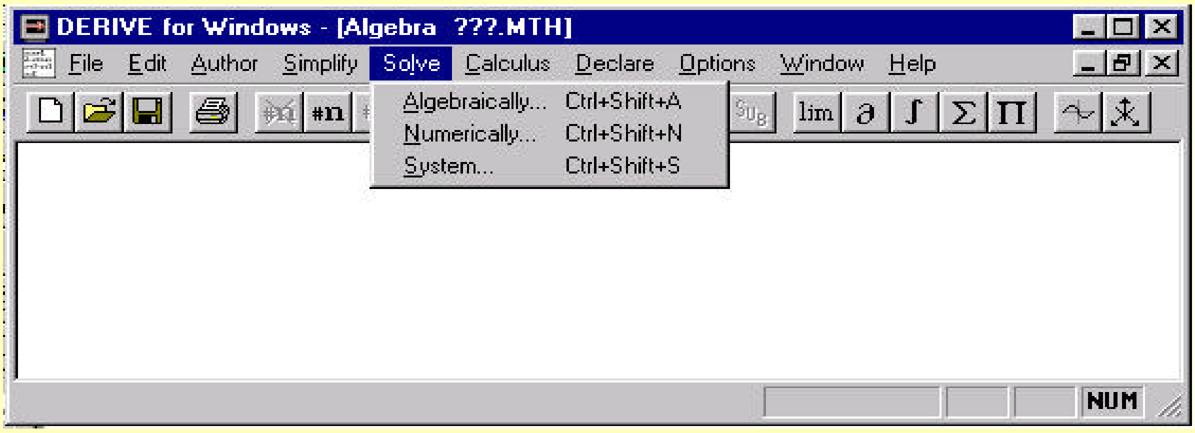
Ejercicios: Construya el vector según la función y los valores de la variable y construya tablas con dos columnas, de tal manera que en la primera columna aparezcan los distintos valores de la variable y en la segunda columna aparezcan las distintas funciones evaluadas en los distintos valores de la variable.

a. *f(x) = a*x^2-x*, a = -1,0,1,…10.

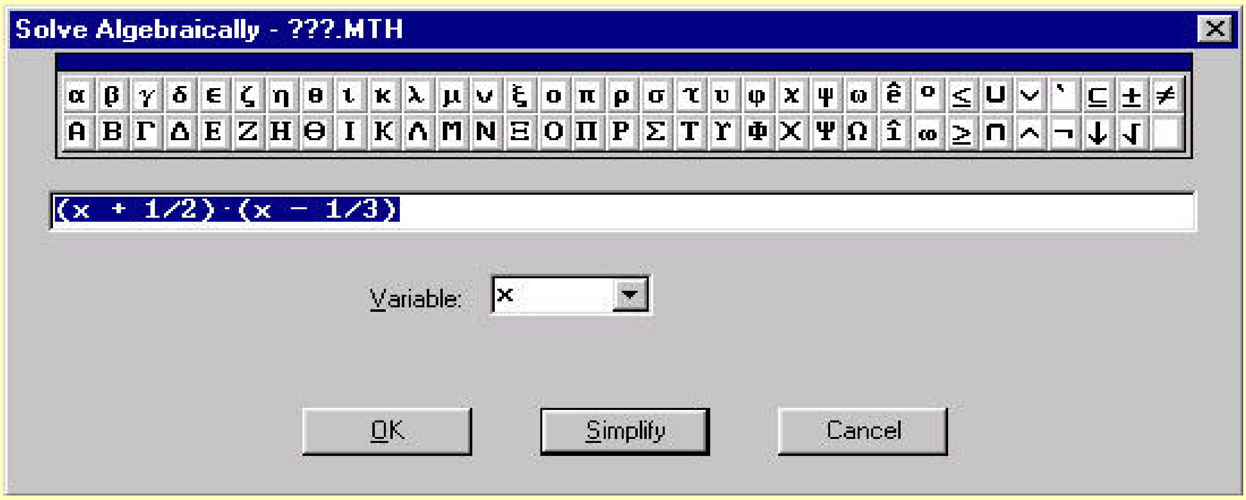
b. $f(x) = \log_c(2+x)$ c = -7, 15, 51, 52.2, 52. 5, 61

c. $(1+1/n)^n$ n =3,6,9,…100

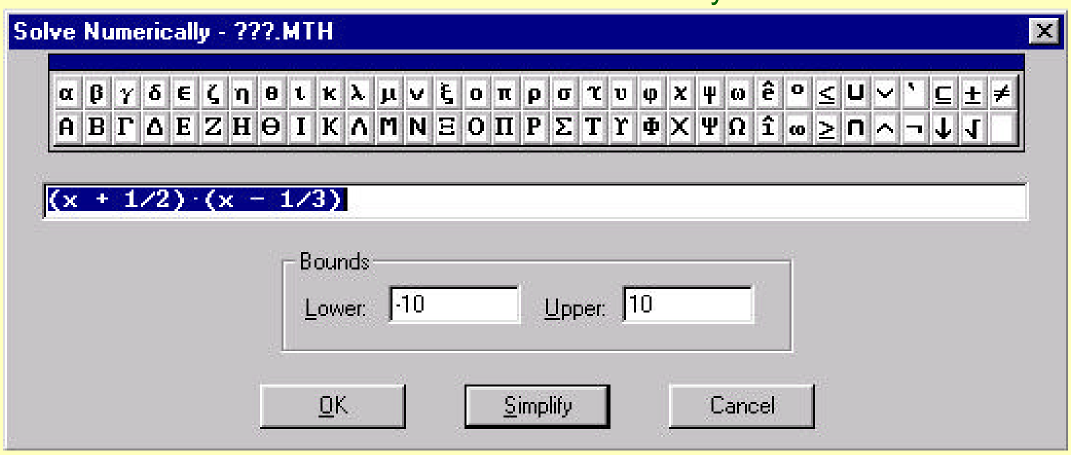
5.3 Resolución de ecuaciones.



· Despejar una incógnita: → Solve – Algebraically o botón: 



→Solve – Numerically

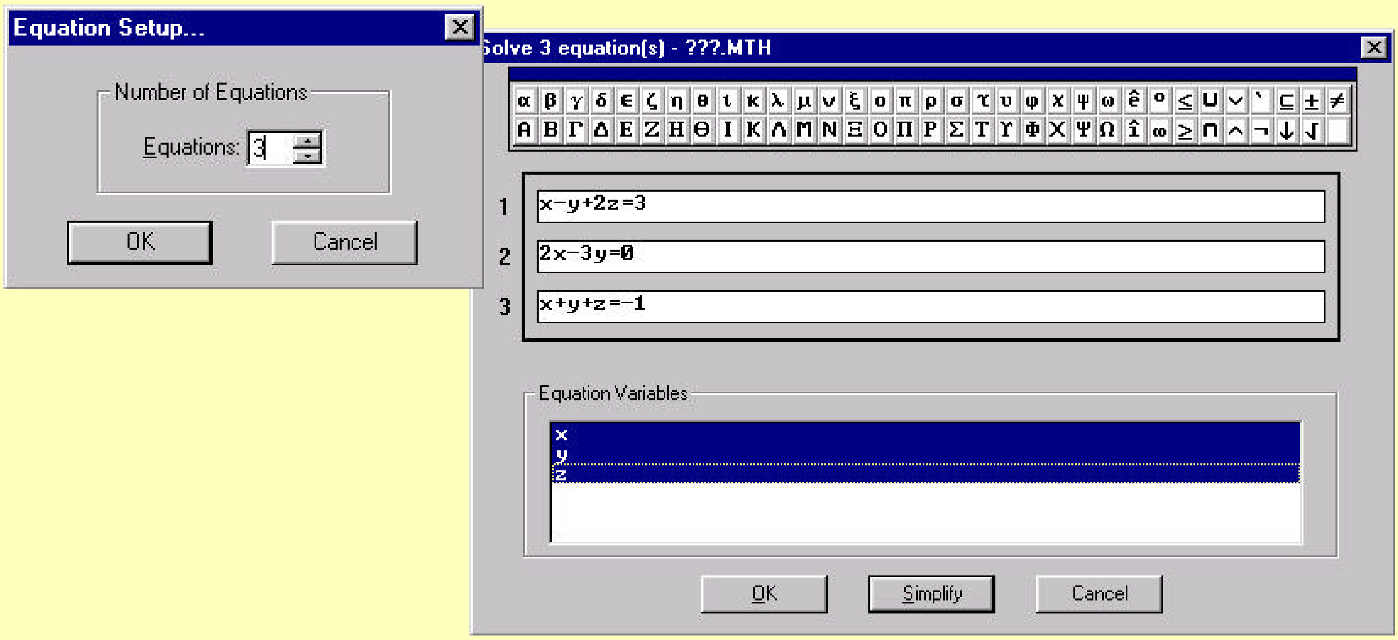


Ejercicio: Resolver x2+1/6x-1/6 = 0 de modo exacto y de modo aproximado en

los intervalos [-10,10] y [-10,0]. Interpretar los resultados obtenidos

5.4 Sistema de Ecuaciones.

· Resolución en modo simbólico: → Menú: Solve - System...



→ Sintaxis: SOLVE([x - y + 2·z = 3, 2·x - 3·y = 0,

x + y + z = -1], [x, y, z])

· Resolución en modo matricial: Ü Sintaxis: ROW_REDUCE(A; b)

Ejercicio: Resolver el siguiente sistema en los dos modos explicados

2x - 2 y + 6z = -3, 3x + y + 13z = 1, 5x - y + 23z = 2.

· Algunos comandos para trabajar con matrices:

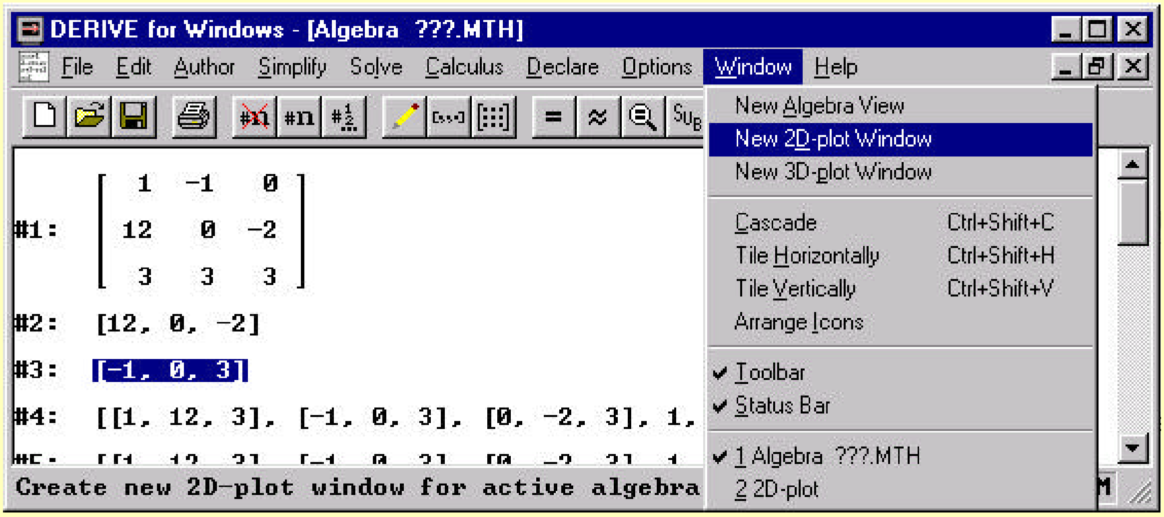
- Seleccionar una fila de una matriz: ELEMENT(A, nº fila) – Simplify

- Seleccionar una columna de una matriz: ELEMENT(A`, nº columna) – Simplify
- Añadir una fila a una matriz: APPEND(A, [[...],...,[...]]) – Simplify
- Añadir una columna a una matriz: APPEND(A`, [[...],...,[...]] )` – Simplify

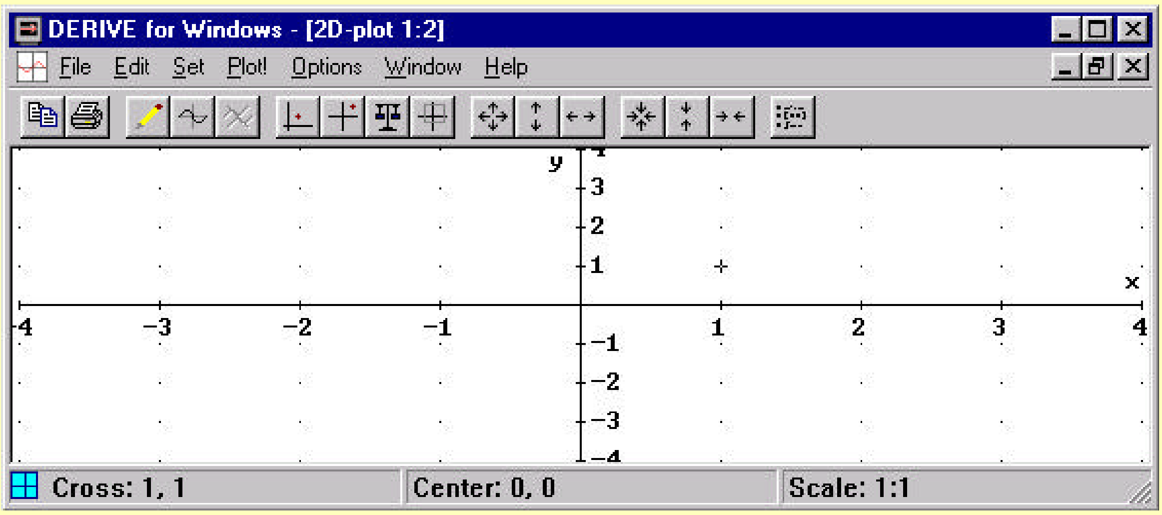
CAPITULO 6: GRAFICAS EN DOS DIMENSIONES (VENTANA 2D)

Para acceder a la ventana 2D haz lo siguiente.

Crear una ventada 2D:→ Menú: Window – New-2Dplot Window



O bien con el Botón: 



6.1 ¿Cómo hacer gráficas de dos dimensiones (2D) utilizando Derive?

Lo que debemos hacer es ingresar la expresión a graficar, seleccionarla y luego presionar con lo cual se abre una nueva ventana (ventana para ver las graficas en 2D), para graficar en definitiva la expresión que queremos graficar presionamos nuevamente.

Ejemplos:

1. Graficar x^2.

Solución:

Ingrese en Derive x^2.

Haga “clic” sobre .

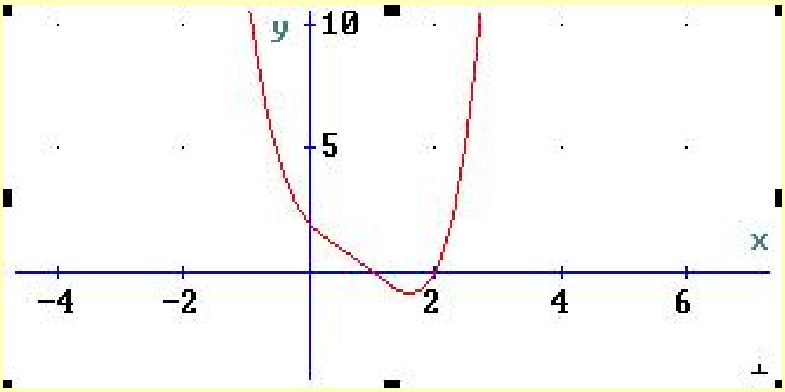
Nuevamente hacemos “clic” sobre .

La gráfica deseada aparecerá.

2. Hacer la grafica de $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Solución:

Haga el procedimiento anterior y obtendrá:



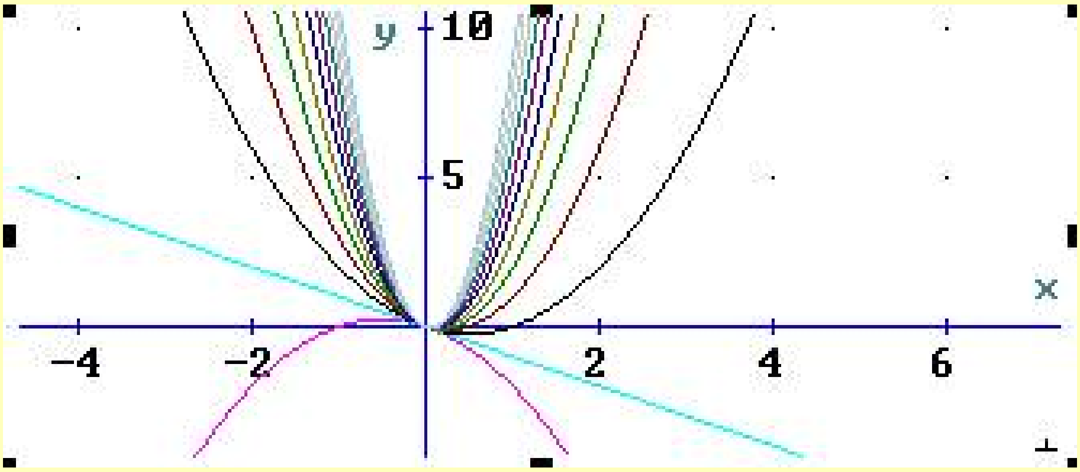
Gráfica de ejemplo 1.

3. Hacer la grafica de la familia de curvas *f(x) = a*x^2-x*, a = -1,0,1,…10.

Solución:

Ingrese en Derive: **vector(a*x^2-x,a,-1,10,1)**

Repitiendo el procedimiento del Ejemplo 1 obtendrá:



Gráfica de ejemplo 2.

1. Haga la gráfica de la tabla que construyó anteriormente con

$(1+1/n)^n$ n = 3,6,9,…100

2. Haga la gráfica de x^1/3?

Con la gráfica anterior, a veces se tiene problema, pues Derive sólo grafica un pedazo de la gráfica. Esto se corrige entrando a DECLARE, Simplifications Settings y seleccionando la rama (Branch) real.

Si se selecciona una parte de la expresión, solo se graficará la parte seleccionada.

En esta ocasión este botón se encuentra en esta misma ventana.

6.2 Menú de la Ventana de Gráficas 2D

Seguidamente se muestra la barra de órdenes de la Ventana de Gráficas en dos dimensiones, la cual permite ejecutar las siguientes opciones:

• Archivo →

Incrustar: Copia el contenido de la Ventana de Gráficas 2D en la Ventana de Álgebra donde están definidas las expresiones.

Actualizar: Actualiza, en la Ventana de Álgebra, las gráficas copiadas con la opción anterior.

Cerrar: Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.

Exportar: Le Permite guardar la Ventana de Gráficas 2D como un fichero en formato

DIB, JPEG, TARGA o TIFF.

Configurar la Página: Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.

Vista Previa: Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.

Imprimir: Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.

Salir: Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.

• Editar →

Anotación: Permite modificar un comentario ya insertado en el gráfico seleccionándolo previamente (haciendo clic sobre él). También es posible ejecutar esta opción haciendo doble clic sobre el comentario.

Borrar Gráfica: I Permite borrar gráficas: la primera, la última, o todas menos la última.

Borrar Todas las Gráficas: Borra todas las gráficas.

Borrar Anotación: Borra un comentario previamente seleccionado haciendo clic sobre él.

Borrar Todas las Anotaciones: Borra todos los comentarios.

Copiar la Ventana: Copia el contenido de la ventana al portapapeles.

Marcar y Copiar: Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.

• Insertar →

Gráfica: Dibuja la gráfica de la expresión seleccionada en la Ventana de Álgebra.

Anotación: Permite introducir un comentario que aparecerá en la posición del cursor.

• Seleccionar →

Sistema de Coordenadas: Permite seleccionar el tipo de coordenadas de representación gráfica: rectangulares o polares.

Posición del Cursor: Permite elegir la posición exacta del cursor.

Región: Permite seleccionar la zona y la malla que se desea que aparezca en pantalla.

Rango de la Gráfica: Opción similar a la anterior.

Relación de Aspecto: Permite establecer la relación entre las longitudes relativas de los ejes.

• Opciones →

Pantalla: Permite visualizar o no los ejes, sus divisiones, el cursor; escoger el nombre de los ejes y determinar el color de los gráficos y del fondo. También es posible definir el formato de la malla. Cuando se dibujan puntos, cabe la posibilidad de determinar su tamaño y de unirlos o no mediante líneas.

Impresión: Permite elegir el formato de la página (márgenes, cabecera, pie de página,...) y la configuración de la impresora. También da la posibilidad de imprimir las gráficas en color o en blanco y negro.

Modo de Trazado: Cuando se activa, el cursor se convierte en un cuadrado que recorre las gráficas de las funciones.

Para ello se usan las siguientes teclas: →, ←; o

Ctrl + →, Ctrl + ←.

Perseguir al Cursor: Cuando está activado, se muestra siempre la parte del gráfico donde está el cursor.

Simplificar antes de Dibujar: Permite representar expresiones sin la necesidad de simplificarlas previamente.

Aproximar antes de Dibujar: Permite representar expresiones sin la necesidad de aproximarlas previamente.

Auto-Escalar Nuevas Gráficas: Ajusta automáticamente la escala del eje de ordenadas.

Cambio de Color: Permite cambiar el color de la siguiente gráfica.

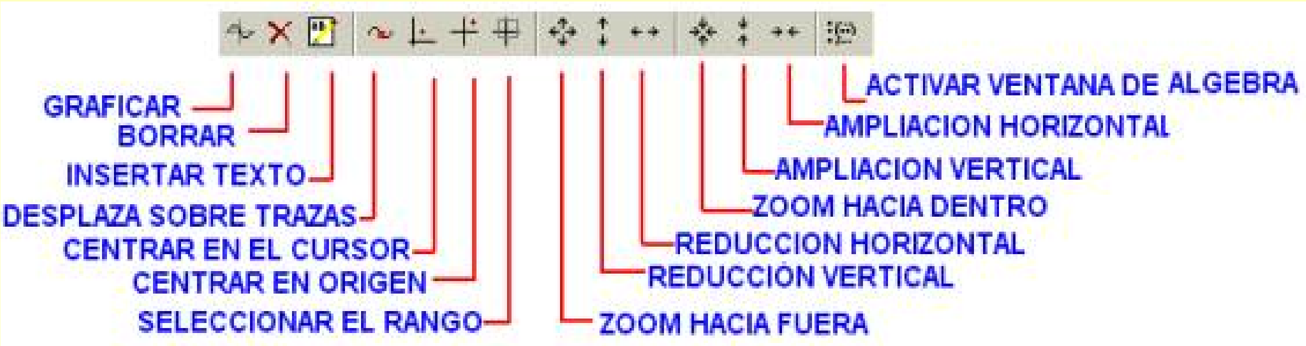
Representar parte Real e Imaginaria

Permite representar funciones complejas: la parte real se dibuja con trazo fino y la parte imaginaria con trazo grueso.

• Ventana → Menú similar al de la Ventana de Álgebra.

• Ayuda → Menú similar al de la Ventana de Álgebra.

6.3 Uso practico de los botones de la ventana de grafica 2D



¿Para qué sirven cada uno de los botones de la ventana de gráfica 2D?

Figura: Botones para graficas en 2D

6.4 ¿Cómo encontrar gráficamente la solución a *f(x)=0* en los reales?

Para resolver x^2–5 = 0, graficamos primero la curva, como hemos explicado anteriormente, y usando el botón que sirve para seleccionar el rango, nos vamos acercando a la parte de la curva que corta el eje x.

1. Se hace clic sobre el botón 

2. Luego se hace clic sostenido en un punto cerca de la región a la que desea acercarse.

3. Arrastre el "Mouse" (con clic sostenido) hasta una esquina opuesta al punto en el numeral anterior y suelte el botón del "Mouse".

4. De Ok como respuesta a la ventana que le sale.

5. Repita este procedimiento, tantas veces quiera con el fin de garantizar precisión en algunas cifras decimales. Esto se obtiene cuando las cifras decimales son las mismas en los números que aparecen en el eje x antes y después del punto al cual nos estamos acercando.

Ejercicios:

Resuelva en los reales:

a) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$,

b) x^5-3x+1 = 0

c) 3x3+3x2-12x+2 = 0

Si en algún momento desea regresar a la ventana original (antes de realizar los ZOOM'S) debe elegir RESET en lugar de OK.

6.5 ¿Cómo definir una función por tramos?

Un ejemplo de una función definida por tramos se muestra a continuación:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le -1 \\ x-3x^2+4 & -1<x\le 4 \\ -3x+18 & 4<x \end{cases}$$

Para ingresar en Derive expresiones de este estilo, podemos hacer uso de los comandos **IF** y **CHI**.

6.5.1 Si usamos el comando IF, la función *f(x)* se debe ingresar:

f(x):=if(x<=-1,(x^2-1),if(x<= 4,(x-3*x^2+4),-3x+18))

La expresión IF usa 3 argumentos, en el primer argumento va la condición que deseamos se evalué (falso o verdadero), en el segundo argumento se coloca la orden que Derive debe seguir en caso de que la condición resulte verdadera y el tercer argumento corresponde a la acción que Derive debe realizar cuando la condición resulte ser falsa.

6.5.2 Si usamos el comando CHI, la función *f(x)* se debe ingresar:

f(x):=(x^2-1)*CHI(-inf,x,-1)+(x-3*x^2+4)*CHI(-1,x,4)+(-3x+18)*CHI(4,x,inf)

CHI(a, x, b) es la función característica de un intervalo. Si a < x < b, CHI(a, x, b) se simplifica a 1. Si x < a ó b < x, CHI(a,x,b) se simplifica a 0

Para mayor información consultar la ayuda de Derive

6.6 ¿Cómo graficar reflexiones de la gráfica de una función f(x): =...?

6.6.1 *Reflexiones con respecto al eje x:*

Se ingresa en Derive f(x) multiplicada por –1. Y se grafica esta nueva función.

Ejemplo: Hacer la gráfica de las funciones

y = 3x+4 y de su reflexión con respecto al eje x . **y = -3x-4.**

6.6.2 *Reflexiones con respecto al eje y:*

Se evalúa f(x) en –x. y se grafica esta nueva función.

Ejemplo: Hacer la gráfica de las funciones

y = 3x+4 y de su reflexión con respecto al eje y, **y = -3x+4.**

f(x) := x^2+x+3 y de su reflexión con respecto al eje y, **f(x) := x^2-x+3**

6.6.3 *Reflexiones con respecto a la recta x = y.*

Se utiliza el botón **SUB** de la Barra de Herramientas. Y se intercambia "**x** por **y"** e "**y** por **x".** (Esto le permitirá encontrar la gráfica de la **inversa de una función uno a uno**.)

Ejemplo: Hacer la gráfica de las funciones

y = 3x+4 y de su reflexión con respecto a la recta y = x, **x = 3y+4.**

6.7 ¿Cómo graficar funciones paramétricas?

Para graficar en Derive curvas paramétricas, basta con encerrar entre [ ] y separadas por una coma, las ecuaciones de x y de y en términos del parámetro.

Ejemplo:

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2+y^2=1$ son:

$$x(t) = \cos(t)$$
$$y(t) = \operatorname{sen}(t) \quad para\; 0 < t < 2\pi$$

Ingresamos en Derive [cos(t), sin(t)] y graficamos. Cuando damos la orden de graficar presionando el botón se despliega un cuadro donde se nos pregunta el valor mínimo del parámetro y el valor máximo del parámetro, ingresamos para nuestro ejemplo 0 y (2*pi)

Figura 5. ventana para ingresar valor del parámetro.

¿Cómo graficar la reflexión de función paramétrica con respecto a la recta y = x? Para hacer esta gráfica basta con cambiar la posición dentro de [,] de las coordenadas x(t) y y(t). Así, si consideramos el caso anterior, la gráfica de la función inversa la podemos obtener fácilmente, ingresando en derive **[sin(t), cos(t)].**

CAPITULO 7: USOS PARA MATEMÁTICAS II

1. Calcula según la figura

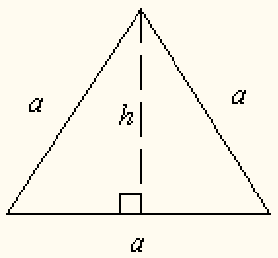
a. sen 30°

b. cos 30°

c. sen 60°

d. cos60°

e. Es necesario conocer las medidas del △?



2. Demuestre la siguiente identidad:

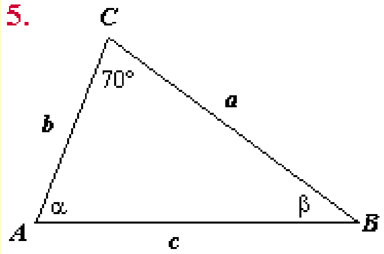
$$\frac{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \tan 3x$$

3. Hallar el perimétro y el área de un triángulo isósceles cuyo ángulo no basal es de 30° y su base mide 25 cm.

4. Simplifica y evalúa la expresión dada

$\tan A - \tan A \operatorname{sen}^2 A$, si $\cos A = -4/5$ y $180 < A < 270$.

5.



$b = 6\ cm$

$c = 10\ cm$

Hallar:

a

α, β

6. $$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 2\sec x$$

7. $$(\sec x - \tan x)^2 = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

8. Demuestre la siguiente identidad

$$\operatorname{sen}(A + B) \cdot \operatorname{sen}(A - B) = \cos^2 B - \cos^2 A$$

Demuestre las siguientes identidades:

9. $$\sec(A - B) = \frac{\sec A \sec B \csc A \csc B}{\csc A \csc B + \sec A \sec B}$$

10. $$\frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)} = \tan B$$

11. $$\tan(\pi/4 + x) - \tan(\pi/4 - x) = 2\tan 2x$$

12. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0,\ 0 < x \le 3\pi/2$

13. Dado el triángulo de medidas

$\overline{AC} = 10,\ \overline{AB} = 20$ y $\overline{BC} = 12$

Calcular la medida de sus ángulos y comprobar que la suma de ellas es 180°

14. Demuestre la siguiente identidad $$\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \sec\theta} - \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \sec\theta} = 2\cos\theta(\cot\theta + \csc^2\theta)$$

Soluciones

1. Solución:

Nombremos adecuadamente la figura.

El ΔPQR es equilátero (todos sus lados son iguales a a); por lo tanto,

el ΔPQR es equiángulo (todo triángulo equilátero es a su vez equiángulo);

por lo tanto,

$\angle RPQ = \angle Q = \angle R = 60°$ {la suma de los ángulos interiores de todo Δ es 180°}

h: altura del ΔPQR; por lo tanto

$\overline{PS}$ biseca al $\angle RPQ$ y al lado $\overline{QR}$; por lo tanto

$$\angle SPQ = 30°$$

$$\overline{QS} = \frac{a}{2}$$

De acuerdo con el Teorema de Pitágoras:

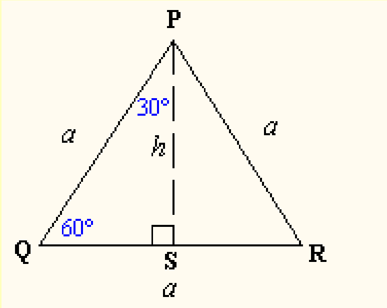
$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2};$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

A la derecha, se deducen los resultados (teniendo enuenta las definiciones del seno y el coseno). En un tiránngulo rectángulo, las funciones trigonométricas, seno y coseno, de un ángilo agudo, se definen:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

e. Como se pudo observar en la obtención de los resultados de a a d, no es necesario conocer las medidas del triángulo.



a. $\operatorname{sen} 30° = \frac{QS}{PQ} = \frac{\frac{a}{2}}{a};$

$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}.$

b. $\cos 30° = \frac{h}{PQ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a};$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

c. $\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{PQ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a};$

$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

d. $\cos 60° = \frac{QS}{PQ} = \frac{\frac{a}{2}}{a};$

$\cos 60° = \frac{1}{2}.$

2. Solución:

$$\frac{\operatorname{sen}4x+\operatorname{sen}2x}{\cos 4x+\cos 2x}=\tan 3x,$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}2x\cos 2x+\operatorname{sen}2x}{\cos^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x+\cos 2x}=\frac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}2x(2\cos 2x+1)}{\cos^2 2x-(1-\cos^2 2x)+\cos 2x}=\frac{3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3 x}{4\cos^3 x-3\cos x},$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}x\cos x(2(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)+1)}{\cos^2 2x-1+\cos^2 2x+\cos 2x}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)},$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}x\cos x(2\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x+1)}{2\cos^2 2x+\cos 2x-1}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)},$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}x\cos x(2(1-\operatorname{sen}^2 x)-2\operatorname{sen}^2 x+1)}{(\cos 2x+1)(2\cos 2x-1)}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)},$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}x\cos x(2-2\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}^2 x+1)}{(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x+1)(2(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)-1)}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)},$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}x\cos x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{(\cos^2 x+\cos^2 x)(2\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x-1)}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)},$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}x\cos x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{2\cos^2 x(2\cos^2 x-2(1-\cos^2 x)-1)}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)},$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(2\cos^2 x-2+2\cos^2 x-1)}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)};$$

$$\therefore \frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)}=\frac{\operatorname{sen}x(3-4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)}$$

3. Solución:

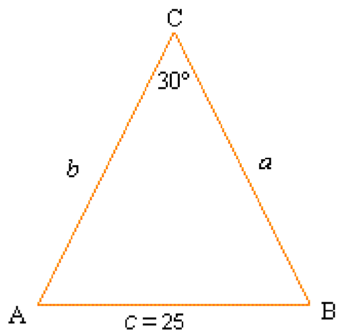
Según la "ley de los senos",

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{c}{\operatorname{sen}C},$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{c\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}C} \quad (1)$$

Se tiene que "la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual 180°"; y como $\angle A=\angle B$ (ángulos de la base en un Δ isósceles); de ahí que:

$$\angle A=\frac{180°-30°}{2}=75° \quad (2)$$



$c = 25 \quad (3)$

$C = 30° \quad (4)$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), se obtiene:

$$a = \frac{25 \operatorname{sen} 75}{\operatorname{sen} 30} = \frac{25(0.965926)}{0.5} \approx 48.3$$

$a = b = 48.3$

Si P es el perímetro del ΔABC, entonces

$P = a + b + c = 48.3 + 48.3 + 25;$

$\therefore \quad P = 121.6$ cm.

La fórmula de Herón nos permite calcular el área de un triángulo a partir de sus lados:

$A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde p : semiperímetro del triángulo

$$p = \frac{121.6}{2} = 60.8$$

De tal manera que:

$$A_\Delta = \sqrt{60.8(60.8-48.3)(60.8-48.3)(60.8-25)} = \sqrt{60.8(12.5)(12.5)(35.8)} = \sqrt{340100};$$

$A_\Delta = 583.2 \text{ cm}^2$.

4. Solución:

$$\tan A - \tan A \cdot \operatorname{sen}^2 A = \tan A(1-\operatorname{sen}^2 A) = \tan A \cdot \cos^2 A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}\cos^2 A = \operatorname{sen} A \cdot \cos A,$$

$$\Rightarrow \quad \tan A - \tan A \cdot \operatorname{sen}^2 A = \left(\sqrt{1-\cos^2 A}\right)\cos A = \left(\sqrt{1-(-4/5)^2}\right)(-4/5),$$

$$\Rightarrow \quad \tan A - \tan A \cdot \operatorname{sen}^2 A = -\frac{4}{5}\sqrt{1-16/25} = -\frac{4}{5}\sqrt{9/25} = -\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5};$$

$$\therefore \quad \tan A - \tan A \cdot \operatorname{sen}^2 A = -\frac{12}{25}.$$

5. Solución:

Según la "Ley de los senos":

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{b}=\frac{\text{sen}\,C}{c} \Leftrightarrow \text{sen}\,\beta=\frac{b\,\text{sen}\,C}{c} \qquad (1)$$

Se tiene que:

$$b=6,\ c=10\ \text{ y }\ C=70° \qquad (2)$$

Sustitiuyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\text{sen}\,\beta=\frac{6\,\text{sen}\,70°}{10}=0.6(0.93969)\approx 0.563816,$$

$\Rightarrow \quad \beta=\text{sen}^{-1}(0.563816);$

$\therefore \quad \beta\approx 34°19'$

$\alpha=180°-(\beta+C) \qquad$ {"la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°"},

$\Rightarrow \quad \alpha=180°-(34°19'+70°)=180°-104°19';$

$\therefore \quad \alpha=75°41' \qquad (3)$

$$a=\frac{c\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,C} \qquad \text{\{de la "ley de los senos"\}} \qquad (4)$$

Sustituyendo $c=10$, $\alpha=75°41'$ y $C=70°$ en (4), se obtiene:

$$a=\frac{10\,\text{sen}\,75°41'}{\text{sen}\,70°}=\frac{10(0.9689438)}{0.9396926};$$

$\therefore \quad a=10{,}3\text{ cm}.$

6. Solución:

$$\frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}=2\sec x,$$

$$\Rightarrow \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}=2\sec x \Leftrightarrow \frac{(1+\text{sen}\,x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\text{sen}\,x)}=2\sec x,$$

$$\Rightarrow \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}=2\sec x \Leftrightarrow \frac{1+2\,\text{sen}\,x+(\text{sen}^2 x+\cos^2 x)}{\cos x(1+\text{sen}\,x)}=2\sec x,$$

$$\Rightarrow \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}=2\sec x \Leftrightarrow \frac{1+2\text{sen}\,x+(1)}{\cos x(1+\text{sen}\,x)}=2\sec x \Leftrightarrow \frac{2+2\text{sen}\,x}{\cos x(1+\text{sen}\,x)}=2\sec x,$$

$$\Rightarrow \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}=2\sec x \Leftrightarrow \frac{2(1+\text{sen}\,x)}{\cos x(1+\text{sen}\,x)}=2\sec x \Leftrightarrow \frac{2\,\cancel{(1+\text{sen}\,x)}}{\cos x\,\cancel{(1+\text{sen}\,x)}}=2\sec x,$$

$$\Rightarrow \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}=2\sec x \Leftrightarrow \frac{2}{\cos x}=2\sec x \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{\cos x}=2\sec x;$$

$$\therefore \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}=2\sec x \Leftrightarrow 2\sec x=2\sec x.$$

7. Solución:

$$(\sec x - \tan x)^2 = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x},$$

$$\Rightarrow \quad (\sec x - \tan x)^2 = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x},$$

$$\Rightarrow \quad (\sec x - \tan x)^2 = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{(1-\operatorname{sen} x)^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-\operatorname{sen} x)}\,(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x};$$

$$\Rightarrow \quad (\sec x - \tan x)^2 = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}.$$

8. Solución:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen}(A+B)\cdot\operatorname{sen}(A-B)=\cos^2 B-\cos^2 A\\
\Leftrightarrow\ & (\operatorname{sen}A\cos B+\operatorname{sen}B\cos A)(\operatorname{sen}A\cos B-\operatorname{sen}B\cos A)=\cos^2 B-\cos^2 A\\
\Leftrightarrow\ & \operatorname{sen}^2 A\cos^2 B-\operatorname{sen}^2 B\cos^2 A=\cos^2 B-\cos^2 A\\
\Leftrightarrow\ & (1-\cos^2 A)\cos^2 B-(1-\cos^2 B)\cos^2 A=\cos^2 B-\cos^2 A\\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 B-\cancel{\cos^2 A\cos^2 B}-\cos^2 A+\cancel{\cos^2 A\cos^2 B}=\cos^2 B-\cos^2 A\\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 B-\cos^2 A=\cos^2 B-\cos^2 A
\end{aligned}$$

9. Solución:

$$\begin{aligned}
& \sec(A-B)\equiv\frac{\sec A\sec B\csc A\csc B}{\csc A\csc B+\sec A\sec B}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\cos(A-B)}\equiv\frac{\dfrac{1}{\cos A\cos B\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}+\dfrac{1}{\cos A\cos B}}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}\equiv\frac{\dfrac{1}{\cancel{\cos A\cos B\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}}{\dfrac{\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\cancel{\cos A\cos B\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}\equiv\frac{1}{\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}
\end{aligned}$$

10. Solución:

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)}=\tan B\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B-(\cos A\cos B-\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B)}{\operatorname{sen}A\cos B+\operatorname{sen}B\cos A+\operatorname{sen}A\cos B-\operatorname{sen}B\cos A}=\tan B\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\cancel{\cos A\cos B}+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B-\cancel{\cos A\cos B}+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B)}{\operatorname{sen}A\cos B+\cancel{\operatorname{sen}B\cos A}+\operatorname{sen}A\cos B-\cancel{\operatorname{sen}B\cos A}}=\tan B\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{2\operatorname{sen}A\cos B}=\tan B\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\cancel{2\operatorname{sen}A}\operatorname{sen}B}{\cancel{2\operatorname{sen}A}\cos B}=\tan B\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\operatorname{sen}B}{\cos B}=\tan B\\
\Leftrightarrow\ & \tan B=\tan B.
\end{aligned}$$

11. Solución:

$$\tan(\pi/4+x)-\tan(\pi/4-x)=2\tan 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\tan(\pi/4)+\tan x}{1-\tan(\pi/4)\tan x}-\frac{\tan(\pi/4)-\tan x}{1+\tan(\pi/4)\tan x}=2\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\tan x}{1-\tan x}-\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \{\tan(\pi/4)=1\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+\tan x)^2-(1-\tan x)^2}{1-\tan^2 x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\cancel{1}+\tan x-\cancel{1}+\tan x)(1+\cancel{\tan x}+1-\cancel{\tan x})}{1-\tan^2 x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(2\tan x)(2)}{1-\tan^2 x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

12. Solución:

$$\operatorname{sen}^2 x-1=0 \Leftrightarrow (\operatorname{sen} x-1)(\operatorname{sen} x+1)=0 \qquad \{\text{factorizando la diferencia de cuadrados}\};$$

$$\therefore \quad (\operatorname{sen} x-1)=0 \ \text{ ó bien } \ (\operatorname{sen} x+1)=0 \qquad \{\text{si alguno de los factores es 0, se cumple la ecuación}\},$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x=1 \ \text{ ó bien } \ \operatorname{sen} x=-1 \qquad \{\text{despejando } \operatorname{sen} x\},$$

$$\Rightarrow \quad x=arc\operatorname{sen}(1) \ \text{ ó bien } \ x=arc\operatorname{sen}(-1),$$

$$\therefore \quad x=\frac{\pi}{2} \ \text{ ó bien } \ x=\frac{3\pi}{2}, \ 0<x\le 3\pi/2.$$

13. Solución:

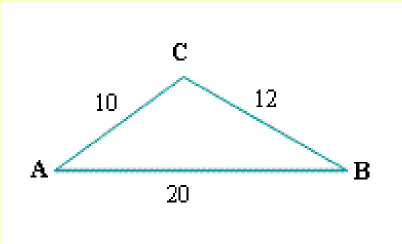
Según la "Ley del coseno",

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad (1)$$

$$a=12,\ b=10,\ c=20 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\cos A=\frac{10^2+20^2-12^2}{2(10)(20)}=\frac{356}{400}=0{,}89 \Leftrightarrow A=\cos^{-1}(0{,}89);$$



$\therefore \quad A = 27°08'$

De la misma forma, se tiene que:

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{12^2+20^2-10^2}{2(12)(20)} = \frac{444}{480} = 0{,}925 \Leftrightarrow B = \cos^{-1}(0{,}925);$$

$\therefore \quad B = 22°20'$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{12^2+10^2-20^2}{2(12)(10)} = \frac{-156}{240} = -0{,}65 \Leftrightarrow C = \cos^{-1}(-0{,}65);$$

$\therefore \quad C = 130°32'$

$A + B + C = 27°08' + 22°20' + 130°32' = 180°.$

14. Solución:

$$\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\sec\theta} - \frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\sec\theta} = 2\cos\theta(\cot\theta+\csc^2\theta) \Leftrightarrow \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\dfrac{1}{\cos\theta}} - \frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\dfrac{1}{\cos\theta}} = 2\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\cos\theta+1}{\cos\theta}} - \frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\cos\theta-1}{\cos\theta}} = 2\cos\theta\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \Leftrightarrow \frac{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta+1} - \frac{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta-1} = 2\cos\theta\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\cos\theta-1)\cancel{\cos\theta}(1-\operatorname{sen}\theta)-(\cos\theta+1)\cancel{\cos\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta+1)(\cos\theta-1)} = 2\cancel{\cos\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\cos\theta-1)(1-\operatorname{sen}\theta)-(\cos\theta+1)(1+\operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta+1)(\cos\theta-1)} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cancel{\cos\theta}-\operatorname{sen}\theta\cos\theta-1+\cancel{\operatorname{sen}\theta}-\cancel{\cos\theta}-\operatorname{sen}\theta\cos\theta-1-\cancel{\operatorname{sen}\theta}}{\cos^2\theta-1} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\operatorname{sen}\theta\cos\theta-1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta-1}{\cos^2\theta-1} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{1-\cos^2\theta} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \Leftrightarrow \frac{2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1)}{\operatorname{sen}^2\theta} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right).$$

CAPITULO 8: CALCULO CON DERIVE.

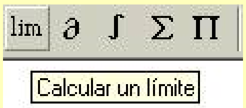
En Cálculo hay muchas operaciones que podremos efectuar fácilmente con Derive, por ejemplo:

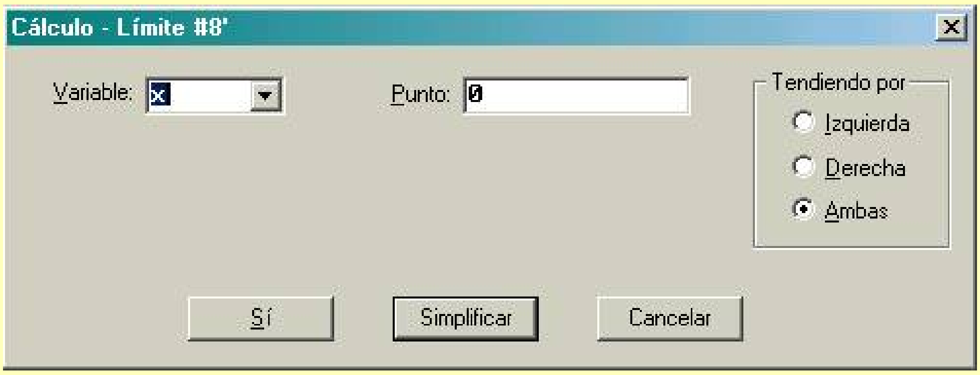
Para hallar límites, derivadas, integrales, sumatorias, o productos basta utilizar los botones apropiados que aparecen en la Barra de Herramientas.

Ejemplo:

Realicemos diferentes cálculos para la función **f(x):= x^2+1.**

Cálculo de límites: Luego de ingresar la expresión, presionamos sobre el botón lim y se despliega un cuadro que nos pregunta cual es la variable con respecto a la cual deseamos calcular el límite, el valor al cual deseamos acercarnos y la dirección por la cual deseamos hacerlo (Izquierda, Derecha o ambos lados). Por último presionamos Simplificar.



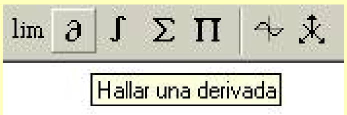


$$f(x) := x^2 + 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

$$1$$

Cálculo de derivadas: Luego de ingresar la expresión, presionamos sobre el botón ∂ y se despliega un cuadro que nos pregunta cuál es la variable con respecto a la cual deseamos calcular la derivada y el orden de la derivada que deseamos calcular. Por último presionamos Simplificar.



$$f(x) := x^2 + 1$$

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

$$2 \cdot x$$

Para encontrar la segunda derivada, seleccionamos de nuevo la expresión *f(x)* y en lugar de colocar 1 en el Orden de la derivada colocamos 2, el resultado es:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$$

$$2$$

Ejercicio: Para la función **g(x):= (x^2-9)/(x-4)** calcular los límites al infinito y cuando se acerca a 4 por ambos lados (Izquierda, Derecha), calcular además la primera derivada y la segunda derivada.